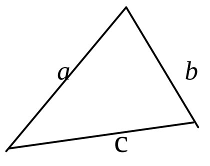
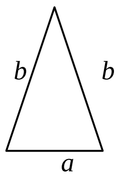
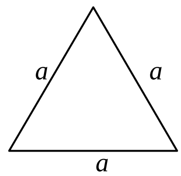
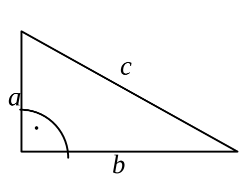
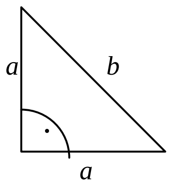
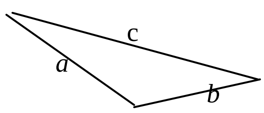
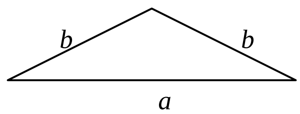
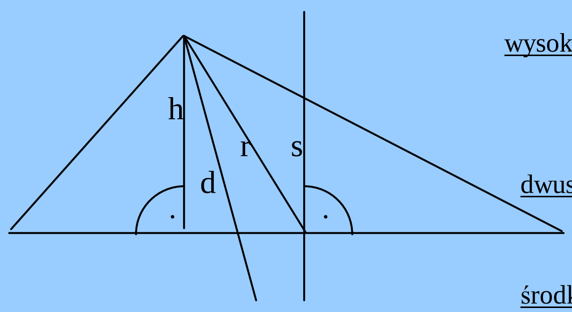
9. 2. WŁASNOŚCI TRÓJKĄTÓW

Klasyfikacja trójkątów

		Podział trójkątów ze względu na boki		
		różnoboczny	równoramienny	równoboczny
Podział trójkątów ze względu na kąty	ostrokątny			
	prostokątny			
	rozwartokątny			

Suma kątów wewnętrznych trójkąta jest równa 180°

c) **Odcinki i linie w trójkącie**



<u>wysokość trójkąta h</u> – odcinek łączący wierzchołek trójkąta z przeciwległym bokiem, prostopadły do niego.

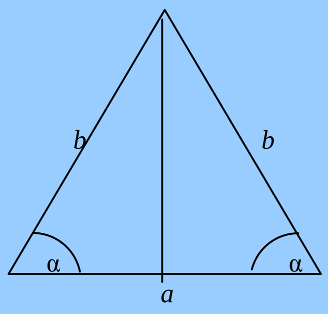
<u>dwusieczna kąta d</u> – półprosta , która dzieli kąt na pół

<u>środkowa trójkąta r</u> – odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.

Twierdzenie o środkowych trójkąta: Środkowe trójkąta przecinają się w punkcie, który nazywamy środkiem ciężkości trójkąta. Punkt ten dzieli każdą ze środkowych w stosunku 2 : 1 licząc do wierzchołków.

<u>symetralna boku trójkąta s</u> – prosta prostopadła do boku i przechodząca przez jego środek

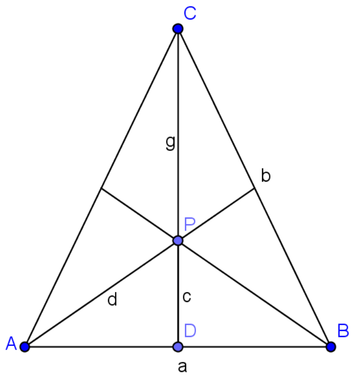
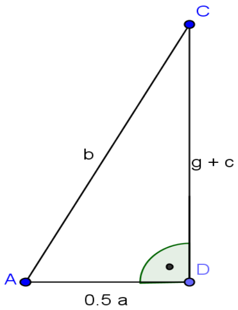
Trójkąt równoramienny

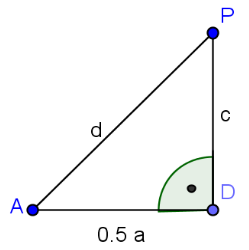


a- podstawa trójkąta
b- ramię trójkąta

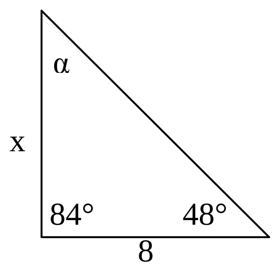
- kąty przy podstawie są równe,
- wysokość dzieli podstawę na połowę
- wysokość dzieli kąt między ramionami na połowę

Przykład 9.2.1. Dany jest trójkąt równoramienny o podstawie 8 i ramieniu 5. Środkowe przecinają się w punkcie P. Oblicz odległości tego punktu od każdego z wierzchołków trójkąta

Rozwiązanie	**Komentarz**
 **Dane:** $a = 8$ $b = 5$ **Szukane:** g, d	Analiza zadania.
$g = 2c$	Z twierdzenia o środkowych trójkąta: *Środkowe trójkąta przecinają się w punkcie, który nazywamy środkiem ciężkości trójkąta. Punkt ten dzieli każdą ze środkowych w stosunku 2 : 1 licząc do wierzchołków,* wynika, że odcinek *g* jest dwa razy dłuższy od odcinka *c*.
	Korzystając z twierdzenia Pitagorasa obliczany długość odcinka *c*

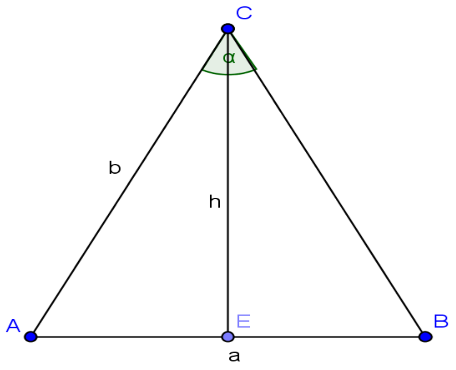
$(0{,}5a)^2+(g+c)^2=b^2$ $4^2+(3c)^2=5^2$ $16+9c^2=25$ $9c^2=25-16$ $c^2=1$ $c=1$	
$g=2c=2\cdot 1=2$	Obliczamy długość odcinka *g*.
 $c^2+(0{,}5a)^2=d^2$ $1^2+4^2=d^2$ $1+16=d^2$ $d^2=17$ $d=\sqrt{17}$	Korzystając z twierdzenia Pitagorasa obliczamy długość odcinka *d*
Odp : $g=2; d=\sqrt{17}$	

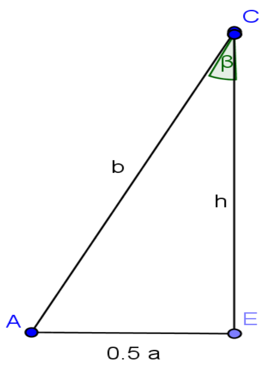
<u>Przykład 9.2.2.</u> Wyznacz kąt α trójkąta oraz długość boku x



Rozwiązanie	Komentarz
$\alpha+84^\circ+48^\circ=180^\circ$ $\alpha=180^\circ-84^\circ-48^\circ$ $\alpha=48^\circ$	Kąt α wyznaczamy wykorzystując własność: *Suma kątów wewnętrznych trójkąta jest równa* 180° .
$x=8$	Dwa kąty w trójkącie są równe . Zatem trójkąt jest równoramienny .

Przykład 9.2.3. Oblicz obwód trójkąta równoramiennego wiedząc, że kąt między ramionami ma miarę 120°, a wysokość poprowadzona z wierzchołka tego kąta ma długość 20 cm .

<table>
<tr><th>Rozwiązanie</th><th>Komentarz</th></tr>
<tr><td>


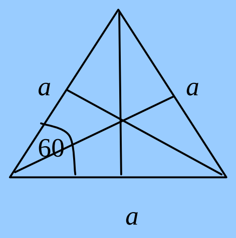
Dane: $h = 20cm$, $\alpha = 120°$
Szukane: $Ob.$
Wzory: $Ob = 2b + a$
</td><td>Analiza zadania.</td></tr>
<tr><td>


$\beta = \frac{1}{2}\alpha = 60°$
$\cos 60° = \frac{h}{b}$
$\frac{1}{2} = \frac{20}{b}$
$b = 40$

$tg 60° = \frac{0{,}5a}{h}$
$\sqrt{3} = \frac{0{,}5a}{20} / \cdot 20$
$20\sqrt{3} = 0{,}5a / \cdot 2$
$a = 40\sqrt{3}$
</td><td>Obliczamy *b* wykorzystując definicję kosinusa
$cos\alpha = \frac{przyprostokatna\_przy\_\alpha}{przeciwprostokatna}$

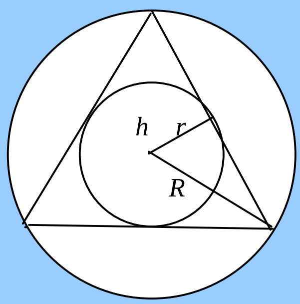
Obliczamy *a* wykorzystując definicję tangensa
$tg\alpha = \frac{przyprostokatna\_naprzeciw\_\alpha}{przyprostokatna\_przy\_\alpha}$
</td></tr>
<tr><td>$Ob = 2b + a = 2 \cdot 40 + 40\sqrt{3} = 80 + 40\sqrt{3}cm$</td><td>Obliczamy obwód trójkąta.</td></tr>
</table>

d) Trójkąt równoboczny



- w trójkącie równobocznym wszystkie kąty maja po $60°$.
- w trójkącie równobocznym środkowe, symetralne, wysokości, dwusieczne przecinają się w tym samym punkcie, który jest jednocześnie promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt, jak i okręgu opisanego na tym trójkącie.

<u>wzór na pole trójkąta równobocznego</u> $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$



<u>wzór na wysokość trójkąta równobocznego</u> $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

<u>wzory na promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny</u>

$$r = \frac{1}{3}h \qquad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

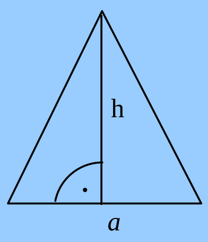
<u>wzory na promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym</u>

$$R = \frac{2}{3}h \qquad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

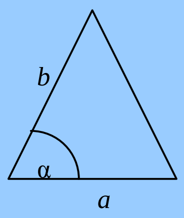
<u>Przykład 9.2.4.</u> Oblicz obwód i promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny wiedząc, że jego pole wynosi $6\sqrt{3}$.

Rozwiązanie	Komentarz
Dane: $P = 6\sqrt{3}$ **Szukane:** Ob, r **Wzory:** $Ob = 3a$, $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	Analiza zadania.
$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3} / \cdot 4$ $a^2\sqrt{3} = 24\sqrt{3} / : \sqrt{3}$ $a^2 = 24$ $a = \sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = 2\sqrt{6}$	Wykorzystując wzór na pole trójkąta równobocznego obliczamy długość jego boku.
$Ob = 3a = 3 \cdot 2\sqrt{6} = 6\sqrt{6}$	Obliczamy obwód trójkąta.
$r = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{18}}{6} = \frac{2\sqrt{9 \cdot 2}}{6} = \frac{6\sqrt{2}}{6} = \sqrt{2}$	Obliczamy promień okręgu wpisanego w trójkąt.

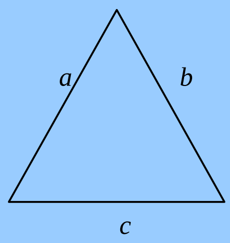
Pole trójkąta



$$P = \frac{1}{2} a \cdot h$$

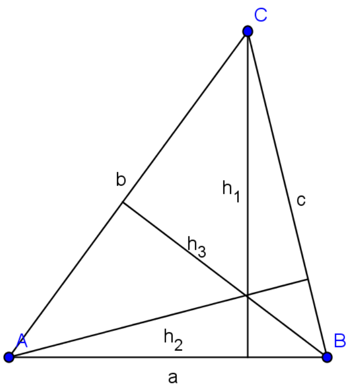


$$P = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\alpha$$



$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ gdzie $$p = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

<u>Przykład 9.2.5.</u> Oblicz długości wysokości trójkąta o bokach $8cm, 4cm, 6cm$.

Rozwiązanie	Komentarz
 **Dane:** $a = 4cm$ $b = 6cm$ $c = 8cm$ **Szukane:** h_1, h_2, h_3	Analiza zadania.

Wzory: $P=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ gdzie $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ $P=\frac{1}{2}a\cdot h_1$ $P=\frac{1}{2}c\cdot h_2$ $P=\frac{1}{2}b\cdot h_3$	
$p=\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{1}{2}(4+6+8)=9$ $P=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{9(9-4)(9-6)(9-8)}=3\sqrt{15}$	Obliczamy pole trójkąta, korzystając ze wzoru $P=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
$P=\frac{1}{2}a\cdot h_1$ $3\sqrt{15}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot h_1$ $3\sqrt{15}=2h_1 \;/:2$ $h_1=\frac{3\sqrt{15}}{2}$	Obliczamy h_1 ze wzoru $P=\frac{1}{2}a\cdot h_1$
$P=\frac{1}{2}c\cdot h_2$ $3\sqrt{15}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot h_2$ $3\sqrt{15}=4\cdot h_2 \;/:4$ $h_2=\frac{3\sqrt{15}}{4}$	Obliczamy h_2 ze wzoru $P=\frac{1}{2}c\cdot h_2$
$P=\frac{1}{2}b\cdot h_3$ $3\sqrt{15}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot h_3$ $3\sqrt{15}=3h_3 \;/:3$ $h_3=\sqrt{15}$	Obliczamy h_3 ze wzoru $P=\frac{1}{2}b\cdot h_3$

ĆWICZENIA

Ćwiczenie 9.2.1. (3pkt) Oblicz pole i obwód trójkąta równobocznego wiedząc, że promień okręgu opisanego na tym trójkącie wynosi $6cm$.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	**Odpowiedź**	**Liczba punktów**
1	Podanie długości boku trójkąta.	1
2	Podanie pola trójkąta.	1
3	Podanie obwodu trójkąta	1

Ćwiczenie 9.2.2. (3pkt) Oblicz pole i obwód sześciokąta foremnego wiedząc ,że promień okręgu wpisanego w ten sześciokąt wynosi $6\sqrt{3}cm$.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie długości boku sześciokąta.	1
2	Podanie pola sześciokąta.	1
3	Podanie obwodu sześciokąta.	1

Ćwiczenie 9.2.3. (4pkt) Oblicz pole i obwód trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej długości 6cm i kącie ostrym $30°$

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie długości krótszej przyprostokątnej.	1
2	Podanie długości dłuższej przyprostokątnej.	1
3	Podanie pola trójkąta.	1
4	Podanie obwodu trójkąta	1

Ćwiczenie 9.2.4. (3pkt) W trójkącie równoramiennym suma długości ramienia i wysokości jest równa $4cm$ .Kąt przy podstawie ma miarę $30°$. Oblicz pole tego trójkąta.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie wysokości trójkąta.	1
2	Podanie długości podstawy trójkąta	1
3	Podanie pola trójkąta	1

Ćwiczenie 9.2.5. (2pkt) Oblicz pole trójkąta o bokach $3,5,7$.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie obwodu trójkąta	1
2	Podanie pola trójkąta	1